

Séance 1 · Exercices

Probabilités, probabilités conditionnelles, indépendance

Adrien Chiodo

Mercredi 7 octobre 2026

Dix exercices, du plus simple au plus exigeant. Les exercices 1 à 4 suivent la partie sur les axiomes, les exercices 5 à 8 la probabilité conditionnelle, les exercices 9 et 10 l'indépendance. Ce qui n'est pas fini en séance se termine dans `exercices/seance-01.md`, dans le dépôt du binôme.

Donnez les probabilités sous forme de fraction, puis de nombre décimal arrondi au millième. Sauf mention d'une source, les chiffres sont fictifs.

Les données réelles de ce fascicule viennent du jeu Hotel booking demand : N. Antonio, A. de Almeida, L. Nunes, « Hotel booking demand datasets », *Data in Brief*, 22 (2019), 41–49, doi:10.1016/j.dib.2018.11.126, licence CC BY 4.0. Il réunit 119 390 réservations de deux hôtels portugais, arrivées de juillet 2015 à août 2017. Une réservation y est dite « annulée » quand le client a annulé, ou qu'il ne s'est pas présenté sans prévenir (moins de 3 % des cas).

EXERCICE 1 · LE SORT D'UNE RÉSERVATION

On suit une réservation jusqu'à sa date d'arrivée, et l'on note ce qui se passe : elle est honorée (H), annulée à l'avance (A), ou le client ne se présente pas, sans prévenir (N).

1. Écrivez l'univers Ω de cette expérience.
2. Écrivez sous forme d'ensemble l'événement V , « le client ne vient pas ».
3. Décrivez par une phrase, puis par un ensemble, le contraire de V .
4. Les événements « la réservation est honorée » et « la réservation est annulée à l'avance » sont-ils incompatibles ? Justifiez.

EXERCICE 2 · UNE CHAMBRE TIRÉE AU SORT

Ce soir, dix chambres sont libres, numérotées de 1 à 10. Le système en attribue une au hasard au prochain client, chaque chambre ayant la même chance. Les chambres 1 à 4 donnent sur le parc. Les chambres 3 à 6 sont des chambres familiales.

On note A , « la chambre donne sur le parc », et F , « la chambre est familiale ».

1. Écrivez Ω , A et F .
2. Écrivez les événements « A et F », « A ou F » et $\bar{A}$.
3. Calculez $P(A)$, $P(F)$, $P(A \text{ et } F)$ et $P(A \text{ ou } F)$.
4. Vérifiez que $P(A \text{ ou } F) = P(A) + P(F) - P(A \text{ et } F)$. Pourquoi faut-il retrancher $P(A \text{ et } F)$?

EXERCICE 3 · LA PROBABILITÉ COMME FRÉQUENCE

Source : Hotel booking demand. L'hôtel de villégiature du jeu a enregistré 40 060 réservations, dont 11 122 ont été annulées.

1. Calculez la fréquence des annulations dans cet hôtel.
2. Que représente ce nombre pour une nouvelle réservation, faite dans des conditions comparables ?
3. L'hôtel attend 200 réservations pour un week-end. Combien d'annulations peut-il prévoir, environ ?
4. Sur les 20 premières réservations d'un mois, 9 ont été annulées. Pourquoi la fréquence $9/20 = 0,45$ est-elle une estimation moins fiable que celle de la question 1 ?

EXERCICE 4 · LES SERVICES DE L'HÔTEL

Parmi les clients d'un hôtel, 70 % prennent le petit-déjeuner, 25 % utilisent le spa, et 15 % font les deux.

1. Un collègue affirme : « $70 \% + 25 \% = 95 \%$ des clients utilisent au moins un des deux services. » Où est l'erreur ?
2. Quelle est la probabilité qu'un client pris au hasard utilise au moins un des deux services ?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'en utilise aucun ?
4. Quelle est la probabilité qu'il prenne le petit-déjeuner sans utiliser le spa ?

EXERCICE 5 · DES POURCENTAGES DE POURCENTAGES

Dans un hôtel, 60 % des réservations passent par une agence de voyage en ligne. Parmi elles, 40 % sont annulées. Parmi les autres réservations, 20 % sont annulées.

1. Traduisez chaque phrase en probabilité, avec la notation $P(\dots | \dots)$ quand il le faut.
2. Quelle part de toutes les réservations est à la fois passée par une agence en ligne et annulée ?
3. Quelle part de toutes les réservations est annulée ? Un arbre aide.
4. *Pour aller plus loin, avant le 9/10.* Parmi les réservations annulées, quelle part est passée par une agence en ligne ?

EXERCICE 6 · LES CLIENTS QUI REVIENNENT

Source : Hotel booking demand, hôtel urbain.

	Annulée	Non annulée	Total
Client déjà venu	441	1 591	2 032
Nouveau client	32 661	44 637	77 298
Total	33 102	46 228	79 330

1. Calculez $P(\text{annulée})$.
2. Calculez $P(\text{annulée} | \text{déjà venu})$ et $P(\text{annulée} | \text{nouveau})$.
3. Calculez $P(\text{déjà venu et annulée})$, puis $P(\text{déjà venu} | \text{annulée})$.

- Rédigez deux phrases pour le directeur : l'une sur le comportement des clients qui reviennent, l'autre sur leur poids dans les annulations.

EXERCICE 7 · LES DEMANDES PARTICULIÈRES

Source : Hotel booking demand, hôtel urbain. Une demande particulière est, par exemple, un lit bébé ou un étage élevé.

	Annulée	Non annulée	Total
Aucune demande	26 340	21 617	47 957
Au moins une demande	6 762	24 611	31 373
Total	33 102	46 228	79 330

- Calculez $P(\text{annulée} \mid \text{au moins une demande})$ et $P(\text{annulée} \mid \text{aucune demande})$.
- Calculez $P(\text{au moins une demande} \mid \text{annulée})$. Pourquoi ce nombre n'est-il pas celui de la question 1 ?
- Le directeur propose : « Incitons tous nos clients à formuler une demande particulière : ils annuleront moins. » Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 8 · CONSTRUIRE LE TABLEAU

Un parc de loisirs interroge 400 visiteurs. 45 % sont venus en train. Parmi les visiteurs venus en train, 30 % viennent pour la première fois. Parmi les autres, 60 % viennent pour la première fois.

- Recopiez et complétez le tableau.

	Première visite	Déjà venu	Total
Venu en train			
Autre moyen			
Total			400

- Calculez $P(\text{première visite})$.
- Calculez $P(\text{train} \mid \text{première visite})$. Comparez avec $P(\text{première visite} \mid \text{train})$.

EXERCICE 9 · INDÉPENDANTS OU NON ?

Un hôtel a reçu 250 réservations un mois donné : 100 pour un séjour de week-end, 150 pour un séjour en semaine. 20 des réservations de week-end et 30 des réservations en semaine comprennent des enfants.

- Construisez le tableau croisé.
- Calculez $P(\text{enfants})$, puis $P(\text{enfants} \mid \text{week-end})$.
- Les événements « séjour de week-end » et « avec enfants » sont-ils indépendants ? Vérifiez aussi avec $P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B)$.
- Dans l'exercice 6, « client déjà venu » et « réservation annulée » sont-ils indépendants ?

EXERCICE 10 · UNE HYPOTHÈSE À VÉRIFIER

Dans un parc, la probabilité qu'une attraction X affiche plus de 60 minutes d'attente un jour donné vaut 0,3 ; pour une attraction Y, elle vaut 0,2.

1. En supposant ces deux événements indépendants, calculez la probabilité que les deux attractions dépassent 60 minutes le même jour.
2. Toujours sous cette hypothèse, calculez la probabilité qu'au moins une des deux dépasse 60 minutes, puis qu'aucune ne dépasse.
3. Sur 50 jours relevés, les deux attractions ont dépassé 60 minutes le même jour 12 fois. Que penser de l'hypothèse d'indépendance ? Pourquoi pouvait-on s'en douter ?