
MTH101 · Séance 3

Lois discrètes · Les missions de l'agence

Adrien Chiodo

Vendredi 9 octobre 2026, après-midi



VARIABLES ALÉATOIRES

Un nombre qui dépend du hasard

- Le nombre d'annulations parmi 20 réservations.
- Le nombre de clients qui arrivent à la réception entre 17 h et 18 h.
- Le nombre de nuits d'un séjour.
- On le note X : c'est une variable aléatoire.

Sa loi de probabilité

- La liste des valeurs possibles de X , chacune avec sa probabilité.
- Chaque probabilité est comprise entre 0 et 1.
- Leur somme vaut 1 : il se passe toujours quelque chose.

Deux réservations

Nombre d'annulations	0	1	2
Calcul	$0,63 \times 0,63$	$2 \times 0,37 \times 0,63$	$0,37 \times 0,37$
Probabilité	0,397	0,466	0,137

Chaque réservation est annulée avec la probabilité 0,37, indépendamment de l'autre : la fréquence observée dans Hotel booking demand (Antonio et al., 2019, licence CC BY 4.0).

ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

La durée d'un séjour

Nombre de nuits	1	2	3	4
Probabilité	0,4	0,3	0,2	0,1

Chiffres fictifs.

L'espérance

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Ce que dit l'espérance

- $E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 2.$
- Un séjour dure en moyenne 2 nuits.
- Sur 500 séjours, on attend environ 1 000 nuitées.
- L'espérance n'est pas forcément une valeur possible : 2,3 nuits, par exemple.

La variance

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

Variance et écart-type

- $V(X) = (1 - 2)^2 \times 0,4 + 0 + (3 - 2)^2 \times 0,2 + (4 - 2)^2 \times 0,1 = 1.$
- L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$ nuit.
- σ s'exprime dans l'unité de X ; la variance, dans son carré.
- Plus rapide : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 4 = 1.$

Même moyenne, autre dispersion

- Hôtel 1 : des séjours de 1 à 4 nuits ; moyenne 2, écart-type 1.
- Hôtel 2 : tous les séjours durent 2 nuits ; écart-type 0.
- Même nombre de nuitées en moyenne.
- Mais un planning du ménage et du linge tout différent.

Chiffres fictifs.



LA LOI DE BERNOULLI

Une épreuve, deux issues

- Une réservation est annulée ($X = 1$) ou non ($X = 0$).
- X vaut 1 avec la probabilité p , 0 avec la probabilité $1 - p$.
- On appelle « succès » l'issue que l'on compte, même une annulation.
- $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.



LA LOI BINOMIALE

n épreuves de Bernoulli

- n épreuves identiques : la même probabilité de succès p .
- Indépendantes : l'issue de l'une ne change rien aux autres.
- X compte les succès : X suit la loi binomiale $B(n ; p)$.
- Exemple : les annulations parmi 20 réservations, avec $p = 0,37$.

Trois réservations

- Une seule annulation : AHH, HAH ou HHA (A annulée, H honorée).
- Chaque chemin a la même probabilité : $0,37 \times 0,63 \times 0,63$.
- $P(X = 1) = 3 \times 0,37 \times 0,63^2 \approx 0,441$.
- Le 3 compte les chemins : les façons de placer 1 annulation parmi 3.

La formule

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$$

Le coefficient binomial

- Le nombre de façons de choisir les k succès parmi les n épreuves.
- Se lit « k parmi n ».
- 1 parmi 3 = 3 ; 7 parmi 20 = 77 520.
- En Python : `math.comb(20, 7)`.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Espérance et variance

- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- Hôtel de villégiature : 200 réservations, $p = 0,278$.
- $E(X) \approx 55,6$ annulations ; $\sigma(X) \approx 6,3$.
- On attend 56 annulations, à 6 près environ.

p : fréquence des annulations de l'hôtel de villégiature de Hotel booking demand (Antonio et al., 2019, licence CC BY 4.0).

Vingt réservations

- X suit la loi $B(20 ; 0,37)$.
- $P(X = 7) \approx 0,181$: la valeur la plus probable.
- $P(X \geq 10) \approx 0,165$: environ un cas sur six.
- $E(X) = 7,4$ et $\sigma(X) \approx 2,16$.

En Python

```
from scipy.stats import binom

binom.pmf(7, 20, 0.37)    #  $P(X = 7)$ 
binom.cdf(9, 20, 0.37)    #  $P(X \leq 9)$ 
binom.sf(9, 20, 0.37)     #  $P(X \geq 10)$ 
binom.mean(20, 0.37), binom.std(20, 0.37)
```

Une hypothèse à vérifier

- La loi binomiale suppose des épreuves indépendantes, de même probabilité.
- Une cause commune peut lier les réservations : une grève, une tempête.
- Alors la loi binomiale ne s'applique plus telle quelle.
- Comme en séance 1 : une hypothèse se justifie avant de servir.

Exercices 8 à 11

- Fascicule, exercices 8 à 11.
- En binôme, 25 minutes.
- Calculatrice, ou Python dans votre codespace.



PAUSE · 10 MINUTES



LA LOI DE POISSON

Compter des événements

- Les clients qui arrivent à la réception en une heure.
- Les appels au standard en une matinée.
- Les pannes signalées en une nuit, dans un grand hôtel.
- Des événements indépendants, à un rythme moyen connu : λ .

La formule

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Espérance et variance

- $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.
- Exemple : 6 arrivées par heure en moyenne, entre 17 h et 18 h.
- $P(X = 0) \approx 0,002$: une heure sans aucune arrivée, presque jamais.
- $P(X \geq 10) \approx 0,084$: environ une heure sur douze.

Chiffres fictifs.

De la binomiale à Poisson

- Un hôtel de 400 chambres. Chaque nuit, chaque chambre signale une panne avec la probabilité 0,005.
- Le nombre de pannes suit $B(400 ; 0,005)$, de moyenne 2.
- La loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2$ en est très proche.
- Beaucoup d'épreuves, un succès rare : la loi de Poisson.

Chiffres fictifs.

En Python

```
from scipy.stats import poisson

poisson.pmf(0, 6)    #  $P(X = 0)$ 
poisson.sf(9, 6)     #  $P(X \geq 10)$ 
poisson.mean(6), poisson.var(6)
```



SIMULER POUR COMPRENDRE

Le notebook de la séance

- Sur github.com/Ad-C/mth101, dossier notebooks : copiez la commande du README.
- Collez-la dans le terminal de votre codespace : le notebook arrive dans exercices.
- Ouvrez-le, puis **Exécuter tout**.
- Répondez aux questions « À vous », puis commit et push.

Ce que montre la simulation

- 10 000 séries de 20 réservations, simulées une à une.
- La fréquence de chaque valeur est proche de la probabilité binomiale.
- La moyenne et la variance simulées sont proches de np et de $np(1 - p)$.
- Simuler permet de vérifier un calcul, ou de s'en passer quand il manque.



LES MISSIONS DE L'AGENCE

Une mission, deux volets

- Une équipe, une mission, commandée par un client du tourisme.
- Un écrit : votre protocole, répété sur votre propre jeu de données simulé, reçu le 23/10.
- Une soutenance le 12/11, devant un jury, auquel des professionnels pourront se joindre : une proposition d'action au client.
- Les clients sont fictifs ; les données sont réelles chaque fois que c'est possible.

La soutenance en quatre temps

1. La problématique du client, dans ses mots.
2. Le benchmark : études publiées, pratiques du secteur, données ouvertes.
3. Le modèle de décision : un simulateur que le jury peut manipuler.
4. Le protocole proposé : le test A/B qui trancherait la question.

Deux thèmes, quatre missions

Thème	Missions
A · Séjourner	A1 · Les annulations ; A2 · Recommandé par l'IA
C · Une journée de loisirs	C1 · Le temps d'attente ; C2 · Les robots de service

A1 · Les annulations

- Client : la direction d'un hôtel.
- « Une part importante de nos réservations est annulée. Faut-il imposer un acompte non remboursable, et combien de chambres pouvons-nous survendre ? »
- Modèle de décision : un simulateur de surbooking, par la loi binomiale.
- Données : Hotel booking demand, 119 390 réservations réelles.

A2 · Recommandé par l'IA

- Client : la direction d'un hôtel.
- « Nos clients demandent de plus en plus conseil à des assistants IA. Qu'est-ce qui les pousse à recommander notre hôtel ? »
- Modèle de décision : la probabilité d'être recommandé, et l'effet de la position dans la liste.
- Données : un audit d'assistant IA mené par vous, au moins 200 requêtes.

C1 · Le temps d'attente

- Client : un grand site de loisirs.
- « Quel temps d'attente afficher, et quel jour conseiller à nos visiteurs ? »
- Modèle de décision : la distribution des attentes, la probabilité d'attendre plus de 60 minutes.
- Données : les temps d'attente réels de deux parcs de Disneyland Paris, relevés toutes les 15 minutes. Powered by [Queue-Times.com](https://www.queue-times.com).

C2 · Les robots de service

- Client : la direction de la restauration d'un grand site de loisirs.
- « Un robot de service dans nos points de restauration : gadget, économie ou aide au personnel ? Et comment l'annoncer à nos visiteurs ? »
- Modèle de décision : un simulateur de déploiement, entre coûts et taux d'acceptation.
- Données : l'omnibus de l'agence ; les études publiées sur les robots de service.

L'omnibus de l'agence

- Un questionnaire anonyme, commun à toute l'agence, diffusé à partir du 23/10.
- Chaque mission y place une question, en deux versions tirées au sort.
- Vous proposez la vôtre au jalon 1, le 15/10.

Les jalons

Date	Étape
Jeu. 15/10	Jalon 1 : benchmark, question omnibus, protocole pré-enregistré
Ven. 23/10	Jeux de répétition ; lancement de l'omnibus et des audits
Ven. 6/11	Jalon 2 : analyses, simulateur, préparation de la soutenance
Mar. 10/11	Remise de l'écrit (date à confirmer)
Jeu. 12/11	Soutenances



LE TIRAGE AU SORT

Les règles

- Huit équipes : deux par mission.
- Neuf équipes : une mission, tirée au sort, en accueille trois.
- Par équité, les trinômes sont tirés sur une même mission.

Votre chance d'obtenir votre mission

- Avant le tirage, chaque équipe note la mission qu'elle préfère.
- Huit équipes, deux places par mission : $P = 2/8 = 1/4$.
- Le bon thème : quatre places sur huit, soit $1/2$.
- Neuf équipes : $1/4 \times 3/9 + 3/4 \times 2/9 = 1/4$, par les deux chemins d'un arbre, comme ce matin.

Combien d'équipes seront servies ?

- Chaque équipe vit une épreuve de Bernoulli : obtenir sa mission, ou non.
- Avec huit équipes, chacune réussit avec la probabilité $1/4$.
- En moyenne : $8 \times 1/4 = 2$ équipes servies.
- Ce n'est pas une binomiale : les places sont comptées, les épreuves dépendent les unes des autres. Les espérances s'additionnent quand même.

Le tirage, en direct

- Les équipes sont numérotées de 1 à N, au tableau, trinômes signalés.
- Quatre volontaires lancent chacun un dé : la graine, par exemple 3516.
- À l'écran, `python3 tirage-missions.py`, suivi de trois options :
 - `--equipes 8 --trinomes 3 6 --graine 3516`
- La même commande redonne le même résultat, sur n'importe quel ordinateur : le script sera publié avec la graine.

Et maintenant

- Lisez la commande de votre mission : le PDF est sur la page du cours.
- Jeudi 15/10, en autonomie : jalon 1.

Sources

- Hotel booking demand : N. Antonio, A. de Almeida, L. Nunes, *Data in Brief*, 22 (2019), 41–49, doi:10.1016/j.dib.2018.11.126. Licence CC BY 4.0.
- Temps d'attente : Powered by [Queue-Times.com](https://queue-times.com).
- Sauf mention d'une source, les chiffres de cette séance sont fictifs.