

Séances 2 et 3 · Exercices

Théorème de Bayes · Lois discrètes, espérance, variance

Adrien Chiodo

Vendredi 9 octobre 2026

Quinze exercices pour la journée. Les exercices 1 à 7 suivent le théorème de Bayes, le matin ; les exercices 8 à 15, les lois discrètes, l'après-midi. Le formulaire et le parcours de consolidation sont en fin de fascicule : si l'on vous l'indique, commencez par le parcours. Ce qui n'est pas fini en séance se termine dans `exercices/seance-02.md` et `exercices/seance-03.md`, dans le dépôt du binôme.

Donnez les probabilités sous forme de fraction quand c'est simple, puis de nombre décimal arrondi au millième. Sauf mention d'une source, les chiffres sont fictifs.

Les données réelles de ce fascicule viennent du jeu Hotel booking demand : N. Antonio, A. de Almeida, L. Nunes, « Hotel booking demand datasets », *Data in Brief*, 22 (2019), 41–49, doi:10.1016/j.dib.2018.11.126, licence CC BY 4.0. Deux hôtels portugais, 119 390 réservations, arrivées de juillet 2015 à août 2017. Une réservation y est dite « annulée » quand le client a annulé, ou qu'il ne s'est pas présenté sans prévenir.

EXERCICE 1 · AFFAIRES ET PETIT-DÉJEUNER

Dans un hôtel, 30 % des clients voyagent pour affaires. 80 % des clients d'affaires prennent le petit-déjeuner, contre 50 % des autres clients.

1. Dessinez l'arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité qu'un client pris au hasard prenne le petit-déjeuner.
3. Un client prend son petit-déjeuner. Quelle est la probabilité qu'il voyage pour affaires ?
4. Un client ne prend pas de petit-déjeuner. Même question.

EXERCICE 2 · LE PASS ANNUEL

Parmi les visiteurs d'un parc de loisirs, 25 % ont un pass annuel. 60 % des détenteurs d'un pass viennent en semaine, contre 20 % des autres visiteurs.

1. Imaginez 2 000 visiteurs. Dessinez l'arbre des fréquences naturelles : des nombres de visiteurs à chaque nœud.
2. Combien de visiteurs viennent en semaine ? Combien d'entre eux ont un pass ?
3. Calculez $P(\text{pass} \mid \text{semaine})$ et $P(\text{pass} \mid \text{week-end})$.
4. Le parc veut proposer une offre de pass annuel à des visiteurs qui n'en ont pas encore. Vaut-il mieux la présenter en semaine ou le week-end ? Donnez deux arguments chiffrés.

EXERCICE 3 · LA COMMANDE 1, PAR LA FORMULE

Source : Hotel booking demand, hôtel urbain. On ne garde de la commande 1 que trois nombres :

- $P(\text{agence en ligne}) = 0,488$: la part des réservations passées par une agence de voyage en ligne ;
 - $P(\text{annulée} \mid \text{agence en ligne}) = 0,374$;
 - $P(\text{annulée}) = 0,417$.
1. Avec la formule de Bayes, calculez $P(\text{agence en ligne} \mid \text{annulée})$.
 2. Comparez avec votre réponse à la question 3 de la commande 1.
 3. Les agences en ligne annulent moins que la moyenne, et pèsent pourtant 44 % des annulations. Expliquez-le à l'aide de la formule.

EXERCICE 4 · LES PUNAISES DE LIT

Un hôtel fait inspecter ses chambres par un détecteur. Une chambre sur 200 est infestée. Le détecteur signale 95 % des chambres infestées, mais aussi 3 % des chambres saines.

1. Imaginez 20 000 inspections. Combien de chambres infestées, et combien sont signalées ?
Combien de chambres saines sont signalées ?
2. Une chambre est signalée. Quelle est la probabilité qu'elle soit infestée ?
3. La direction veut fermer chaque chambre signalée pour la traiter. Sur 100 chambres fermées, combien le seraient à tort, environ ?
4. *Pour aller plus loin.* Une chambre signalée est inspectée une seconde fois, et de nouveau signalée. On suppose les deux inspections indépendantes. Quelle est maintenant la probabilité qu'elle soit infestée ? Partez de la réponse à la question 2 comme nouveau taux de base.

EXERCICE 5 · LES AVIS CINQ ÉTOILES

Sur une plateforme, 10 % des avis sont faux. 90 % des faux avis donnent cinq étoiles, contre 40 % des avis authentiques.

1. Quelle part des avis donnent cinq étoiles ?
2. Un avis donne cinq étoiles. Quelle est la probabilité qu'il soit faux ?
3. Un avis donne moins de cinq étoiles. Même question.
4. La plateforme envisage de masquer tous les avis cinq étoiles. Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 6 · UN MODÈLE, DEUX HÔTELS

Un modèle de prédiction des annulations signale 75 % des réservations qui seront annulées ; il signale aussi 10 % de celles qui seront honorées. On l'installe dans deux hôtels. Dans l'hôtel A, 40 % des réservations sont annulées ; dans l'hôtel B, 10 %.

1. Imaginez 1 000 réservations de l'hôtel A. Combien d'alertes justes, combien de fausses alertes ?
Calculez $P(\text{annulée} \mid \text{signalée})$.
2. Même question pour l'hôtel B.
3. Le fournisseur annonce : « 75 % des annulations détectées, seulement 10 % de fausses alertes. »
Pourquoi ces deux chiffres ne suffisent-ils pas à dire si une alerte est fiable ?

EXERCICE 7 · VRAI OU FAUX

Justifiez chaque réponse en une phrase.

- « 90 % des fraudes au paiement d'un hôtel viennent de cartes étrangères : 90 % des paiements par carte étrangère sont donc frauduleux. »
- « Si $P(A | B) = P(B | A)$, avec des probabilités non nulles, alors $P(A) = P(B)$. »
- « Un contrôle qui ne se trompe que dans 1 % des cas donne une alerte juste 99 fois sur 100. »
- « Si un test signale aussi souvent les cas positifs que les cas négatifs, $P(B | A) = P(B | \bar{A})$, il n'apporte aucune information sur A. »

EXERCICE 8 · LA DURÉE DES SÉJOURS

Dans un hôtel, le nombre de nuits X d'un séjour suit la loi suivante.

Nombre de nuits	1	2	3	4	5
Probabilité	0,35	0,25	0,20	0,15	?

- Complétez le tableau.
- Calculez $E(X)$, et interprétez le résultat.
- Calculez $V(X)$ par les deux formules du cours, puis $\sigma(X)$.
- L'hôtel attend 120 séjours en novembre. Combien de nuitées peut-il prévoir ?

EXERCICE 9 · DEUX RÉSERVATIONS

Deux réservations sont annulées chacune avec la probabilité 0,37, indépendamment l'une de l'autre. On note X le nombre d'annulations.

- Construisez l'arbre, puis donnez la loi de X .
- Calculez $E(X)$ et $V(X)$.
- Comparez avec $2 \times 0,37$ et $2 \times 0,37 \times 0,63$. Quelle loi X suit-elle ?

EXERCICE 10 · VINGT RÉSERVATIONS

Un hôtel suit 20 réservations, annulées chacune avec la probabilité 0,37 : la fréquence observée dans Hotel booking demand.

- Pourquoi peut-on dire que le nombre X d'annulations suit la loi binomiale $B(20 ; 0,37)$? Quelle hypothèse faut-il faire ?
- Calculez $P(X = 7)$. Le nombre de façons de choisir 7 réservations parmi 20 vaut 77 520.
- Avec Python, calculez $P(X \leq 5)$ et $P(X \geq 10)$.
- Calculez $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- Le directeur annonce : « 7 annulations sur 20, pas une de plus. » Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 11 · LE PETIT-DÉJEUNER

Un matin, 12 chambres sont occupées, un client par chambre. Chaque client descend prendre le petit-déjeuner avec la probabilité 0,6, indépendamment des autres. On note X le nombre de clients qui descendent.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculez la probabilité que les 12 clients descendent, puis qu'aucun ne descende.
3. Calculez $E(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Combien de couverts préparer pour que chacun soit servi au moins 95 matins sur 100 ? Aidez-vous du tableau.

k	6	7	8	9	10	11
$P(X \leq k)$	0,335	0,562	0,775	0,917	0,980	0,998

EXERCICE 12 · BINOMIALE OU PAS ?

Pour chaque variable, dites si elle suit une loi binomiale. Si oui, donnez n et p ; sinon, dites quelle condition manque.

1. Un hôtel envoie un questionnaire à 50 clients ; chacun répond avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres. X : le nombre de réponses.
2. Un client loue un vélo chaque jour d'un séjour de 7 jours avec la probabilité 0,3, indépendamment d'un jour à l'autre. X : le nombre de jours de location.
3. Un parc tire au sort 3 gagnants parmi 20 visiteurs, dont 8 enfants. X : le nombre d'enfants parmi les gagnants.
4. X : le nombre de jours de pluie en octobre, dans un parc de loisirs.
5. X : le nombre de clients arrivés à la réception entre 17 h et 18 h.

EXERCICE 13 · LA RÉCEPTION

Entre 17 h et 18 h, le nombre X de clients qui arrivent à la réception suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Calculez $P(X = 0)$ et $P(X = 6)$.
2. Avec Python, calculez $P(X \geq 10)$.
3. Donnez $E(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Sur un quart d'heure, le nombre d'arrivées suit une loi de Poisson de paramètre 1,5. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune arrivée en 15 minutes ? d'en avoir au moins 3 ?

EXERCICE 14 · LES PANNES DE LA NUIT

Un hôtel compte 400 chambres. Chaque nuit, chaque chambre signale une panne avec la probabilité 0,005, indépendamment des autres.

1. Quelle est la loi exacte du nombre X de pannes d'une nuit ? Son espérance ?
2. Calculez $P(X = 0)$ avec cette loi, puis avec la loi de Poisson de même espérance.

3. Le technicien de nuit peut traiter deux pannes au plus. Avec la loi de Poisson, quelle est la probabilité qu'une nuit lui en apporte davantage ?

EXERCICE 15 · LE TIRAGE AU SORT

Les quatre missions, deux par thème, sont tirées au sort entre les équipes : chaque équipe a la même chance d'obtenir chacune des places.

1. Avec huit équipes et deux places par mission, quelle est la probabilité qu'une équipe obtienne la mission qu'elle préfère ? une mission du thème qu'elle préfère ?
2. Avec neuf équipes, une mission, tirée au sort, a trois places, et les trois autres deux. Quelle est la probabilité qu'une équipe obtienne la mission qu'elle préfère ? Un arbre aide.
3. Avec huit équipes, chacune note sa mission préférée. Combien d'équipes l'obtiendront, en moyenne ? Justifiez, sans supposer d'indépendance.
4. Les huit équipes préfèrent toutes la même mission. Combien l'obtiendront ? Comparez avec la question 3.

LE NOTEBOOK DE SIMULATION

Le notebook `seance-03-simulation-binomiale-poisson.ipynb` se copie depuis github.com/Ad-C/mth101, dossier `notebooks`, dans le dossier `exercices` de votre dépôt. Ses questions « À vous » se traitent dans le notebook.

FORMULAIRE

Le théorème de Bayes, et son dénominateur développé :

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}$$

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \bar{A}) P(\bar{A})}$$

Espérance, variance, écart-type d'une variable X qui prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, dans l'unité de X .

Loi de Bernoulli de paramètre p : $E(X) = p$; $V(X) = p(1 - p)$.

Loi binomiale $B(n ; p)$: le nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$. En Python : `binom.pmf(k, n, p)`, `binom.cdf(k, n, p)`, `binom.sf(k, n, p)`.

Loi de Poisson de paramètre λ : le nombre d'événements indépendants dans un intervalle, à un rythme moyen λ .

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$E(X) = V(X) = \lambda$. En Python : `poisson.pmf(k, lam)`, `poisson.cdf(k, lam)`, `poisson.sf(k, lam)`.

PARCOURS DE CONSOLIDATION

Cinq exercices courts, un par question du quiz de positionnement du 7 octobre : pourcentages, fractions, lecture d'un tableau. Toute la journée s'appuie sur ces calculs. Faites ceux que l'on vous indique, ou ceux qui vous ont posé problème.

C1 • Pourcentage d'une quantité

Un hôtel de 180 chambres est occupé à 80 %.

1. Combien de chambres sont occupées ?
2. 25 % des chambres occupées sont des suites. Combien de suites sont occupées ?
3. Quelle part de toutes les chambres de l'hôtel ces suites représentent-elles ?

C2 • Hausses et baisses

Le prix d'une nuit passe de 80 € à 92 €.

1. De quel pourcentage a-t-il augmenté ?
2. Il baisse ensuite de 15 %. Quel est le nouveau prix ?
3. A-t-il retrouvé son niveau de départ ? Pourquoi ?

C3 • Fractions et pourcentages

1. Écrivez $3/5$, $7/20$ et $1/8$ sous forme de pourcentage.
2. Les deux tiers des clients d'un hôtel viennent en couple, et les trois quarts de ces couples réservent en ligne. Quelle fraction de tous les clients sont des couples qui réservent en ligne ? En pourcentage ?

C4 • Un pourcentage d'un pourcentage

Dans un parc, 30 % des visiteurs sont étrangers, et 40 % d'entre eux viennent pour la première fois.

1. Quelle part de tous les visiteurs sont des étrangers venus pour la première fois ?
2. Un collègue répond « 40 % ». Où est son erreur ?
3. Sur 5 000 visiteurs, combien de personnes cela représente-t-il ?

C5 · Lire un tableau croisé

Clients d'un hôtel un samedi :

	Petit- déjeuner	Sans	Total
Familles	45	15	60
Couples	36	54	90
Total	81	69	150

1. Parmi les familles, quelle part prend le petit-déjeuner ?
2. Parmi les clients qui prennent le petit-déjeuner, quelle part sont des familles ?
3. Les deux réponses utilisent la même case. Pourquoi différent-elles ?