

Parcours en autonomie

Les lois discrètes · Jeudi 15 octobre, 60 minutes

Adrien Chiodo

Jeudi 15 octobre 2026

Avant de commencer. Ouvrez votre codespace et synchronisez-le, pour récupérer ce que votre équipe a poussé. Si ce n'est pas déjà fait, tapez une fois dans un terminal (menu **Terminal, Nouveau terminal**) : `git config --global pull.rebase false`. Sans ce réglage, la synchronisation échoue dès que deux membres de l'équipe ont commité chacun de leur côté (FAQ du cours, question 3).

Les lois discrètes n'ont pas pu être traitées le 9 octobre : ce parcours les reprend, seul ou en équipe, en 60 minutes. Il ne demande que lire un tableau, multiplier et additionner des probabilités.

Les chiffres. 0,37 et 0,278 (hôtel de villégiature) sont les fréquences d'annulation observées dans Hotel booking demand : N. Antonio, A. de Almeida, L. Nunes, *Data in Brief*, 22 (2019), 41–49, doi:10.1016/j.dib.2018.11.126, licence CC BY 4.0. Les autres sont fictifs.

LE MODE D'EMPLOI

Minutes	Ce que vous faites
0 à 20	Lire le cours (section 1), crayon en main : refaites chaque exemple avant d'en lire la solution.
20 à 40	Les exercices 8, 10 et 13 (section 2).
40 à 52	Le notebook de la séance 3 (section 3) : la question « À vous » 1.
52 à 60	L'auto-évaluation (section 4), puis son corrigé.

Chez soi, avant le 23 octobre : les exercices 9, 11, 12, 14 et 15, et les questions « À vous » 2 à 5. Les corrigés sont à la fin, après une page de séparation.

De l'aide. Une notion qui résiste : le kit tuteur, <https://ad-c.github.io/mth101/kit-tuteur.html>, qui fait d'un assistant IA un tuteur. Une question qui reste : l'intervenant, adrien.chiodo@ecole-89.com.

1. LE COURS

1.1 Variable aléatoire et loi de probabilité

Une **variable aléatoire** est un nombre qui dépend du hasard : le nombre d'annulations parmi 20 réservations, ou de nuits d'un séjour. On la note X .

Sa **loi de probabilité** est la liste de ses valeurs possibles, chacune avec sa probabilité. Chaque probabilité est comprise entre 0 et 1, et leur somme vaut 1 : il se passe toujours quelque chose.

Exemple résolu : deux réservations. Chacune est annulée avec la probabilité 0,37, indépendamment de l'autre. X , le nombre d'annulations, vaut 0, 1 ou 2.

1. $X = 0$: les deux sont honorées, $0,63 \times 0,63 \approx 0,397$.

2. $X = 1$: deux chemins dans l'arbre, annulée puis honorée, ou honorée puis annulée : $2 \times 0,37 \times 0,63 \approx 0,466$.
3. $X = 2$: $0,37 \times 0,37 \approx 0,137$.
4. Vérification : $0,397 + 0,466 + 0,137 = 1$.

1.2 Espérance, variance, écart-type

L'**espérance** est la moyenne des valeurs, chacune pesée par sa probabilité : la moyenne que l'on observerait sur un très grand nombre de répétitions.

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

La **variance** mesure la dispersion autour de l'espérance : la moyenne des carrés des écarts. Le carré empêche les écarts positifs et négatifs de s'annuler.

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

Plus rapide : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. L'**écart-type** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'exprime dans l'unité de X ; la variance, dans son carré.

Exemple résolu : la durée d'un séjour.

Nombre de nuits	1	2	3	4
Probabilité	0,4	0,3	0,2	0,1

1. $E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 2$: un séjour dure 2 nuits en moyenne. Sur 500 séjours, on attend environ 1 000 nuitées.
2. Par la définition : $V(X) = (1 - 2)^2 \times 0,4 + 0 + (3 - 2)^2 \times 0,2 + (4 - 2)^2 \times 0,1 = 0,4 + 0,2 + 0,4 = 1$.
3. Par la formule rapide : $E(X^2) = 1 \times 0,4 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,2 + 16 \times 0,1 = 5$, et $V(X) = 5 - 2^2 = 1$. On soustrait le carré de l'espérance, pas l'espérance.
4. $\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$ nuit.

L'espérance n'est pas forcément une valeur possible : 2,3 nuits en moyenne, par exemple. Elle dit le niveau, l'écart-type la dispersion : une décision a besoin des deux.

1.3 La loi de Bernoulli

Une épreuve, deux issues : une réservation est annulée ou non. X vaut 1 pour l'issue que l'on compte, appelée « succès » même si c'est une annulation, et 0 sinon. X vaut 1 avec la probabilité p , 0 avec la probabilité $1 - p$. Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Exemple résolu : une réservation, annulée avec la probabilité 0,37.

1. $E(X) = 0 \times 0,63 + 1 \times 0,37 = 0,37$.
2. $V(X) = (0 - 0,37)^2 \times 0,63 + (1 - 0,37)^2 \times 0,37 = 0,2331$, soit bien $0,37 \times 0,63$.
3. $\sigma(X) = \sqrt{0,2331} \approx 0,483$.

1.4 La loi binomiale

On répète n épreuves de Bernoulli **identiques**, de même probabilité de succès p , et **indépendantes** : l'issue de l'une ne change rien aux autres. Le nombre X de succès suit la loi binomiale $B(n ; p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Le coefficient se lit « k parmi n » : c'est le nombre de façons de placer les k succès parmi les n épreuves. n! se lit « factorielle n » : $1 \times 2 \times \dots \times n$, avec $0! = 1$. En Python, `math.comb(20, 7)` donne 77 520.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple résolu : trois réservations, annulées chacune avec la probabilité 0,37. Quelle est la probabilité d'une seule annulation ?

1. Les chemins à une annulation : AHH, HAH et HHA (A annulée, H honorée). Il y en a 3 : « 1 parmi 3 » vaut 3.
2. Chaque chemin a la même probabilité : $0,37 \times 0,63 \times 0,63$.
3. $P(X=1) = 3 \times 0,37 \times 0,63^2 \approx 0,441$.

Espérance et variance : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$. X est la somme de n variables de Bernoulli, et l'espérance d'une somme est la somme des espérances, même sans indépendance. Pour 200 réservations de l'hôtel de villégiature, avec $p = 0,278$: $E(X) = 55,6$ et $\sigma(X) = \sqrt{(200 \times 0,278 \times 0,722)} \approx 6,3$. On attend 56 annulations, à 6 près environ.

En Python, avec 20 réservations et $p = 0,37$:

```
from scipy.stats import binom
```

```
binom.pmf(7, 20, 0.37)    # P(X = 7), environ 0,181
binom.cdf(9, 20, 0.37)    # P(X <= 9)
binom.sf(9, 20, 0.37)     # P(X > 9), donc P(X >= 10), environ 0,165
```

pmf donne la probabilité d'une valeur, cdf la probabilité cumulée $P(X \leq k)$, sf le complément $P(X > k)$.

Python écrit 0.37, avec un point.

Une hypothèse à vérifier. La loi binomiale suppose des épreuves indépendantes et de même probabilité. Une cause commune, une grève ou une tempête, peut lier les réservations : la loi binomiale ne s'applique plus telle quelle. Une hypothèse se justifie avant de servir.

1.5 La loi de Poisson

Elle compte des événements indépendants, qui arrivent à un rythme moyen connu, λ (« lambda »), dans un intervalle : les clients qui arrivent à la réception en une heure, les appels au standard en une matinée. Aucun nombre d'épreuves n'est fixé : X peut valoir 0, 1, 2... sans limite haute.

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

e vaut environ 2,718 ; en Python, `math.exp(-6)` calcule e^{-6} . Alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Exemple résolu : la réception, entre 17 h et 18 h, avec $\lambda = 6$ arrivées par heure.

1. $P(X=0) = e^{-6} \times 6^0 / 0! = e^{-6} \approx 0,002$: une heure sans aucune arrivée, presque jamais.
2. $P(X=2) = e^{-6} \times 6^2 / 2! = 18 e^{-6} \approx 0,045$.
3. $P(X \geq 10)$: `poisson.sf(9, 6) \approx 0,084`, environ une heure sur douze.
4. $E(X) = 6$ et $\sigma(X) = \sqrt{6} \approx 2,45$.

De la binomiale à Poisson. Beaucoup d'épreuves et un succès rare : la loi binomiale $B(n; p)$ est alors très proche de la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. L'exercice 14 le montre sur les pannes d'un hôtel. En

Python: `from scipy.stats import poisson, puis poisson.pmf(k, lam), poisson.cdf(k, lam)`
 et `poisson.sf(k, lam)`, comme pour la binomiale.

2. LES EXERCICES

Ils sont dans le fascicule d'exercices du 9 octobre, sur la page du cours :

<https://ad-c.github.io/mth101/supports/seance-02-03/mth101-seances-02-03-exercices.pdf>.

Calculatrice, ou Python dans votre codespace. Les trois premiers en séance ; les cinq suivants chez soi, dans cet ordre.

Exercice	Ce qu'il fait travailler	Si vous bloquez, relisez
8 · La durée des séjours	Espérance, variance par les deux formules	1.2 et son exemple
10 · Vingt réservations	La loi binomiale, sa formule, Python	1.4 ; « 7 parmi 20 » est donné
13 · La réception	La loi de Poisson	1.5 et son exemple
9 · Deux réservations	Une loi par un arbre ; reconnaître une binomiale	1.1, puis 1.4
11 · Le petit-déjeuner	Binomiale et probabilité cumulée	1.4, « En Python »
12 · Binomiale ou pas ?	Les conditions de la loi binomiale	1.4, « Une hypothèse à vérifier » ; 1.5
14 · Les pannes de la nuit	De la binomiale à Poisson	1.5, dernier paragraphe
15 · Le tirage au sort	Bernoulli, espérance d'une somme	1.3 ; 1.4, « Espérance et variance »

3. LE NOTEBOOK DE LA SÉANCE 3

S'il n'est pas déjà dans votre dépôt, copiez-le, depuis le terminal :

```
N=seance-03-simulation-binomiale-poisson.ipynb
curl -fsSL -o exercices/$N \
  https://raw.githubusercontent.com/Ad-C/mth101/main/notebooks/$N
```

Ouvrez-le, puis **Exécuter tout**. Dans le premier graphique, les barres (fréquences de 10 000 séries simulées de 20 réservations) et les points (probabilités de la loi $B(20; 0,37)$) se superposent ; la moyenne et la variance simulées sont proches de np et de $np(1-p)$. Simuler permet de vérifier un calcul, ou de s'en passer quand il manque.

En séance, la question « À vous » 1 ; chez soi, les questions 2 à 5 ; puis **Valider** et **Synchroniser les modifications**. Sans Codespaces : le lien « Ouvrir dans Colab » du README de notebooks.

4. L'AUTO-ÉVALUATION

Cinq questions courtes, sans aide, en huit minutes.

1. Une variable X vaut 0, 1 ou 2. $P(X = 0) = 0,5$ et $P(X = 1) = 0,3$. Que vaut $P(X = 2)$? Calculez $E(X)$.
2. Une variable de Bernoulli a pour paramètre $p = 0,2$. Que valent $E(X)$ et $V(X)$?
3. Dix clients réservent chacun le dîner avec la probabilité 0,3, indépendamment les uns des autres. Quelle est la loi du nombre X de dîners réservés ? Calculez $E(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Le nombre d'appels au standard en une heure suit une loi de Poisson de paramètre 4. Que valent $E(X)$ et $V(X)$? Calculez $P(X = 0)$.
5. Vrai ou faux : « L'espérance d'une variable aléatoire est toujours l'une de ses valeurs possibles. »

Arrêtez-vous ici. Les corrigés commencent à la page suivante.

Cherchez d'abord : un corrigé lu sans avoir cherché ne laisse presque rien. Si vous bloquez, relisez le passage du cours que donne le tableau des exercices, ou demandez au kit tuteur un indice, pas la solution.

LES CORRIGÉS

Exercice 8 · La durée des séjours

1. $1 - (0,35 + 0,25 + 0,20 + 0,15) = 0,05$.
2. $E(X) = 0,35 + 0,50 + 0,60 + 0,60 + 0,25 = 2,3$: un séjour dure 2,3 nuits en moyenne.
3. Par la définition : $1,69 \times 0,35 + 0,09 \times 0,25 + 0,49 \times 0,20 + 2,89 \times 0,15 + 7,29 \times 0,05 = 1,51$. Par la formule rapide : $E(X^2) = 6,8$, et $6,8 - 2,3^2 = 1,51$. $\sigma(X) = \sqrt{1,51} \approx 1,23$ nuit.
4. Environ $120 \times 2,3 = 276$ nuitées.

Exercice 10 · Vingt réservations

1. 20 épreuves de Bernoulli de même probabilité 0,37, dont on compte les succès. Il faut supposer les réservations indépendantes : l'hypothèse se justifie, ou se discute.
2. $77\,520 \times 0,37^7 \times 0,63^{13} \approx 0,181$.
3. $\text{binom.cdf}(5, 20, 0.37) \approx 0,191$; $\text{binom.sf}(9, 20, 0.37) \approx 0,165$.
4. $E(X) = 20 \times 0,37 = 7,4$; $V(X) = 7,4 \times 0,63 = 4,662$; $\sigma(X) \approx 2,16$.
5. 7 est la valeur la plus probable, mais elle ne se réalise qu'environ une fois sur cinq (0,181). Une fois sur six, il y aura au moins 10 annulations : une prévision s'accompagne de sa dispersion.

Exercice 13 · La réception

1. $P(X=0) = e^{-6} \approx 0,002$; $P(X=6) = e^{-6} \times 6^6 / 6! \approx 0,161$.
2. $\text{poisson.sf}(9, 6) \approx 0,084$.
3. $E(X) = 6$; $\sigma(X) = \sqrt{6} \approx 2,45$.
4. $e^{-1,5} \approx 0,223$; $1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \approx 0,191$. Le paramètre suit la durée : 6 arrivées par heure, 1,5 par quart d'heure.

Exercice 9 · Deux réservations

1. $P(X=0) = 0,63^2 \approx 0,397$; $P(X=1) = 2 \times 0,37 \times 0,63 \approx 0,466$; $P(X=2) = 0,37^2 \approx 0,137$.
2. $E(X) = 0,4662 + 2 \times 0,1369 = 0,74$; $E(X^2) = 0,4662 + 4 \times 0,1369 = 1,0138$, d'où $V(X) = 1,0138 - 0,74^2 = 0,4662$.
3. Ce sont np et $np(1-p)$: X suit la loi binomiale $B(2; 0,37)$.

Exercice 11 · Le petit-déjeuner

1. $B(12; 0,6)$.
2. $0,6^{12} \approx 0,0022$; $0,4^{12} \approx 0,000017$.
3. $E(X) = 7,2$; $V(X) = 12 \times 0,6 \times 0,4 = 2,88$; $\sigma(X) \approx 1,70$.
4. 10 couverts : $P(X \leq 10) \approx 0,980$, quand $P(X \leq 9) \approx 0,917$ reste sous 0,95. Préparer la moyenne, 7 couverts, laisserait des clients sans couvert plus de deux matins sur cinq : $P(X \geq 8) = 1 - 0,562 = 0,438$.

Exercice 12 · Binomiale ou pas ?

1. Oui : $B(50; 0,2)$.
2. Oui : $B(7; 0,3)$.

- Non : le tirage se fait sans remise, la probabilité de tirer un enfant change d'un gagnant à l'autre ; les épreuves ne sont pas indépendantes.
- Non : la pluie d'un jour rend plus probable celle du lendemain, et la probabilité varie au fil du mois.
- Non : aucun nombre d'épreuves n'est fixé. C'est un cas pour la loi de Poisson.

Exercice 14 · Les pannes de la nuit

- $B(400 ; 0,005) ; E(X) = 400 \times 0,005 = 2$.
- $0,995^{400} \approx 0,1347 ; e^{-2} \approx 0,1353$.
- $P(X \geq 3) = 1 - e^{-2} \times (1 + 2 + 2) = 1 - 5 e^{-2} \approx 0,323$: une nuit sur trois environ. La loi binomiale donne aussi 0,323.

Exercice 15 · Le tirage au sort

- $2/8 = 1/4 ; 4/8 = 1/2$.
- Premier niveau de l'arbre : la mission préférée est celle à trois places ($1/4$), ou non ($3/4$). Second niveau : $3/9$, ou $2/9$. Formule des probabilités totales : $1/4 \times 3/9 + 3/4 \times 2/9 = 3/36 + 6/36 = 1/4$.
- Chaque équipe obtient sa mission avec la probabilité $1/4$: une épreuve de Bernoulli. Le nombre d'équipes servies est la somme de ces huit épreuves, et l'espérance d'une somme est la somme des espérances, même sans indépendance : $8 \times 1/4 = 2$.
- Exactement deux, toujours : même espérance, 2, mais aucune dispersion.

Le notebook

- Par la simulation, environ 0,16 ; valeur exacte, `binom.sf(9, n, p)` $\approx 0,165$.
- $E(X) = 200 \times 0,278 = 55,6 ; \sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,278 \times 0,722} \approx 6,34$. Une simulation de 10 000 week-ends donne des valeurs proches.
- Environ 0,043 ; `poisson.sf(10, lam)` $\approx 0,0426$.
- $k = 10 : P(X \leq 9) \approx 0,916$ reste sous 0,95, $P(X \leq 10) \approx 0,957$; `poisson.ppf(0.95, lam)` renvoie 10.
- Moins proches : $P(X = 0)$ vaut 0,1285 contre 0,1353, $P(X = 2)$ 0,2777 contre 0,2707. Avec 40 épreuves et $p = 0,05$, les épreuves sont moins nombreuses et le succès moins rare : l'approximation se dégrade.

L'auto-évaluation

- $P(X = 2) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2 ; E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 = 0,7$. Sinon, relisez 1.1 et 1.2.
- $E(X) = 0,2$ et $V(X) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$. Sinon, relisez 1.3.
- $B(10 ; 0,3) ; E(X) = 3 ; V(X) = 2,1$, d'où $\sigma(X) \approx 1,45$. Sinon, relisez 1.4.
- $E(X) = V(X) = 4 ; P(X = 0) = e^{-4} \approx 0,018$. Sinon, relisez 1.5.
- Faux : un séjour peut durer 2,3 nuits en moyenne (exercice 8). Sinon, relisez 1.2.